

# Guiado háptico pasivo sub-óptimo con observador de energía

Mario O. Ordaz-Oliver<sup>1</sup>, Omar A. Domínguez-Ramírez<sup>2</sup>  
y Omar J. Santos-Sánchez<sup>3</sup>

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo,  
Grupo de Electrónica y Control, CITIS-ICBI, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México  
[x2\\_kyo@hotmail.com](mailto:x2_kyo@hotmail.com), [omar@uaeh.edu.mx](mailto:omar@uaeh.edu.mx), [omarj@uaeh.edu.mx](mailto:omarj@uaeh.edu.mx)

**Resumen** En este artículo se implementa una estrategia de control no lineal sub-óptima sobre la interfaz háptica PHANTOM 1.0 para tareas de guiado háptico, la cual se sintetiza a partir de la teoría de Programación de Dinámica de Richard Bellman. El control implementado en esta contribución mantiene la estructura del enfoque de control sub-óptimo. El objetivo principal de la aplicación de este controlador no lineal sub-óptimo es la penalización de un índice de desempeño basado en la energía total del sistema, que garantice un comportamiento permisible en tareas de guiado háptico, preservando la vida útil de los componentes electromecánicos del dispositivo, y la medición objetiva de desempeño a través del intercambio de energía en la interacción hombre-robot.

**Palabras clave:** programación dinámica; sub-óptimo; interfaz háptica; estabilidad; pasividad.

## 1. Introducción

La optimización de sistemas dinámicos es un área recientemente estudiada. La optimización de la energía es un objetivo natural en distintas áreas de la ingeniería, así como el análisis y control de los sistemas dinámicos [1,8]. Se han propuesto distintas técnicas y objetivos para la optimización, sin embargo, hay dos ejes de mayor investigación en esta área: El primero de estos enfoca su interés en la síntesis de estrategias de control óptimo, y el segundo eje concentra su interés en el filtrado óptimo de señales [2]. En el campo de la optimización no lineal hay una serie de esfuerzos por obtener un controlador para los sistemas no lineales [10], que consideran sistemas de parámetros distribuidos. Cuando se concideran los enfoques de programación dinámica y cálculo variacional para determinar la solución de problemas de control óptimo en sistemas no lineales, se utiliza comúnmente la ecuación Hamilton Jacobi Bellman. Sin embargo, se sabe que la función de Bellman para sistemas no lineales no tiene una estructura definida y por tanto su aproximación o determinación son una tarea bastante complicada. Cuando la programación dinámica es aplicada al control de robots manipuladores, la complejidad del problema aumenta, puesto que deben considerarse distintos fenómenos como las zonas singulares, los efectos eléctricos y

mecánicos a los que están constantemente sometidas las articulaciones de los robots manipuladores. Si a esto se agrega el propósito de optimizar el desempeño dinámico del robot por medio de la función de Bellman o su aproximación, la complejidad del problema se incrementa aún más. En esta área, se presentan principalmente aquellos resultados definidos por la planificación de trayectorias con la optimización de la ley de control y el problema de estabilización óptima. Hemami en [4] obtiene una estrategia de control óptimo por medio de la linearización de la dinámica y la obtención de la solución de la ecuación algebraica de Riccati relacionada a tal linearización, con el fin de obtener un controlador para tareas de seguimiento robots móviles, esta propuesta considera un índice de desempeño cuadrático de horizonte infinito. Por otra parte Lin, F. y Brandt en [9], emplean un regulador cuadrático lineal (LQR) para la obtención de una ley de control robusto para un robot tipo SCARA de 2 articulaciones, cuyo modelo matemático es desconocido y se utiliza la ecuación de Hamilton Jacobi Bellman, por medio de la cual se sintetiza un controlador óptimo, con la solución de una ecuación algebraica de Riccati. Verschueren en [14] obtiene la solución al problema de seguimiento de trayectoria en tiempo óptimo para un manipulador industrial KUKA 361 de 6 grados de libertad (GDL), como un problema de control óptimo convexo de una entrada. Es importante mencionar que la literatura examinada y citada sólo presenta resultados de implementaciones numéricas, sin reportar una validación experimental. Hacemos énfasis en la principal contribución de este trabajo, que es poner a prueba un controlador no lineal sub-óptimo en lazo cerrado basado en el enfoque de Programación Dinámica, para guiado háptico, penalizando el índice de desempeño y de este modo obtener un comportamiento apropiado para esta clase de tareas. Esta ley de control fue probada previamente para controlar un péndulo sub-actuado de dos grados de libertad conocido como pendubot [12], el cual presenta un buen desempeño y manipulabilidad. Es importante mencionar que el dispositivo sobre el cual se está probando experimentalmente ley de control no lineal es un sistema robótico completamente actuado. Se presentan los resultados experimentales para validar la viabilidad de este controlador. La determinación de las penalizaciones del controlador sub-óptimo no lineal probado para guiado háptico presenta un grado de complejidad, dado que este control inicialmente se sintetiza con el objeto de minimizar un índice de desempeño. Por otra parte, la penalización en línea del controlador permite la obtención de un comportamiento deseado. El esquema propuesto se prueba con los resultados experimentales mediante el uso de la interfaz háptica PHANTOM 1.0, en una tarea de guiado háptico. Además, utilizando una penalización adecuada del estado y de la ley de control en el índice de desempeño para la síntesis del controlador no lineal, los resultados experimentales obtenidos indican que el algoritmo de control sub-óptimo tiene un desempeño adecuado, el cual puede emplearse con propósitos de rehabilitación, adiestramiento y entrenamiento por medio de tareas de guiado háptico pasivo.

El presente artículo tiene la siguiente estructura: En la sección 2, se describe la plataforma empleada para esta contribución, el modelo matemático y las

propiedades din\'amicas de PHANToM 1.0. En la secci\'on 3 se sintetiza la ley de control no lineal sub-\'optima de esta contribuci\'on. La secci\'on 4 se emplea para describir la arquitectura y el hardware de la interfaz h\'aptica PHANToM 1.0 y a partir de ello se definen las condiciones para la evaluaci\'on de la ley de control no lineal. En la Secci\'on 5, se dan a conocer los resultados experimentales de la implementaci\'on. Finalmente, en la secci\'on 6 se definen las conclusiones y observaciones finales.

## 2. Modelo matem\'atico y propiedades del sistema

Incialmente, en esta secci\'on se presenta el dispositivo h\'aptico PHANToM 1.0, sistema sobre el cual se eval\'ua la estrategia de control no lineal sub-\'optimo. A partir del modelo din\'amico del sistema y de sus propiedades, se sintetiza la ley de control a probar. PHANToM 1.0 es un dispositivo h\'aptico de tres grados de libertad, que cuenta con articulaciones de revoluci\'on y por tanto puede ser definido como un mecanismo de eslabones articulados, tiene prop\'ositos distintos a los de un robot manipulador, sin embargo, la t\'ecnica de modelado es la misma. De acuerdo con [13], el modelo din\'amico reducido de este dispositivo es obtenido por medio de la formulaci\'on de Euler-Lagrange en movimiento libre, y definido como:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + b\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (1)$$

m\'as espec\'icamente un dispositivo h\'aptico en aplicaciones de guiado h\'aptico, el sistema define la formulaci\'on Euler-Lagrange (con el operador humano en el lazo de control)

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + b\dot{q} + G(q) = \tau + \tau_h, \quad (2)$$

con  $H(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matriz de inercias,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matriz de fuerzas centri\'petas y de coriolis,  $b \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  matriz de fuerzas de fricci\'on,  $G(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  vector de fuerzas debidas a efectos gravitacionales,  $[\tau + \tau_h] \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  vector de pares generalizados de entrada (definidos por la ley de control y el operador humano), en donde  $\tau_h = J^T F_h$ , y  $F_h$  representa la din\'amica de fuerza que propicia el operador humano en el efector final,  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\ddot{q} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones generalizadas respectivamente, con la forma:

$$\begin{aligned} H(q) &= \begin{bmatrix} h_{11}(q_2, q_3) & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23}(q_2, q_3) \\ 0 & h_{32}(q_2, q_3) & h_{33} \end{bmatrix}, \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} c_{11}(q_2, q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3) & c_{12}(q_2, q_3, \dot{q}_1) & c_{13}(q_2, q_3, \dot{q}_1) \\ c_{21}(q_2, q_3, \dot{q}_1) & 0 & c_{23}(q_2, q_3, \dot{q}_3) \\ c_{31}(q_2, q_3, \dot{q}_1) & c_{32}(q_2, q_3, \dot{q}_3) & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}, \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(q_2) \\ g_3(q_3) \end{bmatrix}, \tau + \tau_d = \begin{bmatrix} \tau_1 + \tau_{h1} \\ \tau_2 + \tau_{h2} \\ \tau_3 + \tau_{h3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $H(q)$  es simétrica, positiva definida, con elementos que son función de  $q$ , como:

$$H(q) = H(q)^T,$$

$$x^T H(q) x > 0; \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

$C(q, \dot{q})$  se relaciona con la matriz de inercias  $H(q)$  por medio de la expresión:

$$x^T \left\{ \dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right\} x \equiv 0; \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (3)$$

conocida como propiedad de anti-simetría.

Por otra parte, el sistema en la forma de Euler-Lagrange involucra su energía total, la cual se define como:

$$\varepsilon = \mathcal{K} + \mathcal{U}, \quad (4)$$

en donde  $\varepsilon$  define el Hamiltoniano o energía total del sistema,  $\mathcal{K}$  es la energía cinética y  $\mathcal{U}$  la energía potencial, definidas como:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q},$$

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n m_i h_i g,$$

sí se deriva (4) y se emplea la propiedad de antisimetría (3), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{q}^T H(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H}(q) \dot{q} + \dot{q}^T G(q), \\ \dot{\varepsilon} &= \dot{q}^T \{-C(q, \dot{q}) \dot{q} - b \dot{q} - G(q) + \tau + \tau_h\} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H}(q) \dot{q} + \dot{q}^T G(q), \\ \dot{\varepsilon} &= \dot{q}^T \tau + \dot{q}^T \tau_h. \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora bien, se tiene de la propiedad de pasividad como:

$$V(x) - V(x_0) \leq \int_0^t y^T(\tilde{x}) u(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

donde  $V(x)$  es una función energética,  $y(\tilde{x})$  es la salida, y  $u(\tilde{x})$  es la entrada del sistema, esta propiedad establece que un sistema expresado en forma Euler-Lagrange es disipativo, es decir, este no puede disipar más energía de la que almacena. Usando (5) en el sistema Euler-Lagrange, la función de energía  $\varepsilon$  como función energética, de la siguiente manera se tiene:

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(0) \leq \int_0^t \dot{q}^T \tau + \dot{q}^T \tau_h dt. \quad (6)$$

### 3. Síntesis de la estrategia de control no lineal

En esta sección se sintetiza la estrategia de control que se aplicará al dispositivo háptico para tareas de guiado háptico pasivo. Desarrollamos una ley de control no lineal sub-óptima para un dispositivo háptico cuya dinámica resulta en la forma de un sistema no lineal afín. Se presentan también los avances en el control óptimo de sistemas no lineales, utilizando el enfoque de control por medio de funciones de Lyapunov y programación dinámica, aquí omitimos la prueba de estabilidad, puesto que el objetivo principal del presente artículo se centra en los resultados experimentales de esta ley de control penalizada, y aplicada al dispositivo PHANToM 1.0, para guiado háptico.

La formulación del problema esta dada alrededor del punto de equilibrio estable,  $x_{eq}$ , entonces el sistema no lineal ne la formulación Euler-Lagrange (1), el modelo matemático puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ H(q)^{-1} [\tau + \tau_h - C(q, \dot{q}) \dot{q} - b\dot{q} - G(q)] \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Para obtener la forma estándar de un sistema no lineal de las ecuaciones dinámicas del robot, se tiene que:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -H^{-1}(q) \{C(q, \dot{q}) \dot{q} + b\dot{q} + G(q)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ H^{-1}(q) \tau + H^{-1}(q) \tau_h \end{bmatrix}, \quad (8)$$

proponiendo el cambio de variables:  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$ ,  $q_3 = x_3$ ,  $\dot{q}_1 = x_4$ ,  $\dot{q}_2 = x_5$ ,  $\dot{q}_3 = x_6$  y definiendo  $\bar{x}_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3]^\top$ ,  $\bar{x}_2 = [x_4 \ x_5 \ x_6]^\top$ ,  $\tau + \tau_d = u$ , reescribimos (8) como

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -H^{-1}(\bar{x}_1) \{C(\bar{x}) \bar{x}_2 + b\bar{x}_2 + G(\bar{x}_1)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ H^{-1}(\bar{x}_1) u \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned} H(\bar{x}_1) &= \begin{bmatrix} h_{11}(x_2, x_3) & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & h_{23}(x_2, x_3) \\ 0 & h_{32}(x_2, x_3) & h_{33} \end{bmatrix}, \\ C(\bar{x}) + b &= \begin{bmatrix} c_{11}(x_2, x_3, x_5, x_6) + b_{11} & c_{12}(x_2, x_3, x_4) & c_{13}(x_2, x_3, x_4) \\ c_{21}(x_2, x_3, x_4) & b_{22} & c_{23}(x_2, x_3, x_6) \\ c_{31}(x_2, x_3, x_4) & c_{32}(x_2, x_3, x_6) & b_{33} \end{bmatrix}, \\ G(\bar{x}_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x_2) \\ g_3(x_3) \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\tilde{x} = x - x_{eq}$ , el sistema (1) es reescrito como:

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) u, \quad (10)$$

en donde  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el estado del sistema y  $u \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  es la entrada de control, con funciones  $f(\tilde{x})$  y  $g(\tilde{x})$  continuas y en espacios apropiados, definidas como:

$$f(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ -H^{-1}(\tilde{x}_1) \{C(\tilde{x})\tilde{x}_2 + b\tilde{x}_2 + G(\tilde{x}_1)\} \end{bmatrix}, g(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ H^{-1}(\tilde{x}_1) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Motivados ahora por en hecho de que el sistema (10) puede ser linealizado alrededor de un punto de equilibrio  $x^+$ , y su linealización se expresa como:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu, \quad (12)$$

en donde:

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \Big|_{x=x^+, u=u^+} = A, \quad \frac{\partial g(\tilde{x})}{\partial u} \Big|_{x=x^+, u=u^+} = B. \quad (13)$$

El par  $(A, B)$  es controlable y existe una matriz  $\mathcal{Q} = \mathcal{H}\mathcal{H}^\top$  tal que el par  $(A, \mathcal{H})$  es observable.

Tomando en cuenta que el método de control sub-óptimo de sistemas dinámicos de esta propuesta se basa en el análisis de la energía. Y para el problema de control sub-óptimo, una funcional puede ser minimizada de acuerdo a criterios deseados propuestos. Esta funcional consiste en la ecuación de energía total del sistema y la energía entregada por sus actuadores. Para esto, definimos el índice de desempeño como:

$$J = \int_0^\infty [f_0(\tilde{x}(t), u(t))] dt, \quad (14)$$

donde  $f_0$  es una función estrictamente positiva definida. De la teoría de Programación Dinámica de Richard Bellman, sabemos que sí existe una función definida positiva  $V(\tilde{x}^*(t))$ , que es continuamente diferenciable y que satisface:

$$\frac{dV(\tilde{x}^*(t))}{dt} \Big|_{(12)} + f_0(\tilde{x}^*(t), u^*(t)) = 0, \quad (15)$$

entonces  $u^*$  es el control óptimo.

Con el fin de proponer un control regulador lineal para el sistema linealizado (12), es posible resolver la ecuación algebraica de Riccati:

$$A^\top P - PBR^{-1}B^\top P + PA = -Q, \quad (16)$$

para obtener la matriz  $P$ , donde  $Q$  es una matriz simétrica, semi-definida positiva y  $R$  es una matriz simétrica, definida positiva. Por medio de la solución  $P$  de la ecuación (16) y en base a (14), definimos la función:

$$V(\tilde{x}) = \frac{1}{2}k_E\tilde{x}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}}_P \tilde{x}, \quad (17)$$

donde  $\tilde{\varepsilon}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  es la función de error de energía, dada como:

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \varepsilon(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \varepsilon_d(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad (18)$$

diferenciando la ecuación (16) a lo largo de las trayectorias de (10) se tiene que:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \dot{\tilde{\varepsilon}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \tilde{x}^\top \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \dot{\tilde{x}}, \quad (19)$$

dada la dinámica del error, y por las propiedades de las matrices positivas definidas y simétricas, se cumple lo siguiente:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \ddot{\tilde{q}}^\top D(q) \ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^\top \dot{D}(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \ddot{\tilde{q}}^\top D(q) \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^\top G(q), \quad (20)$$

por medio de la integral de la propiedad (5), se verifica la propiedad de pasividad (6), como:

$$\int_0^t \dot{\tilde{\varepsilon}}(q, \dot{q}) dt = \int_0^t \dot{\tilde{q}}^\top \tau + \dot{\tilde{q}}^\top \tau_h dt, \Rightarrow \dot{\tilde{\varepsilon}}(q, \dot{q}) - \dot{\tilde{\varepsilon}}(0, 0) = \int_0^t \dot{\tilde{q}}^\top \tau + \dot{\tilde{q}}^\top \tau_h dt, \quad (21)$$

en donde  $\dot{\tilde{q}}$  se toma como la salida y  $\tau$  como la entrada del sistema. Ahora bien, (18) puede escribirse como:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2 \tau + k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2 \tau_h + \tilde{x}^\top \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \dot{\tilde{x}}, \quad (22)$$

es decir:

$$\dot{V}(\tilde{x}) = k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}^\top \tau + k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}^\top \tau_h + \bar{x}_1^\top \bar{P}_{11} \bar{x}_2 + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{21} \bar{x}_2 + \bar{x}_1^\top \bar{P}_{12} \dot{\bar{x}}_2 + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{22} \dot{\bar{x}}_2, \quad (23)$$

y mediante la sustitución de (1) en (23), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) = & k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}^\top \tau + k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}^\top \tau_h + \bar{x}_1^\top \bar{P}_{11} \bar{x}_2 + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{21} \bar{x}_2 \\ & + \{\bar{x}_1^\top \bar{P}_{12} + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{22}\} D^{-1}(\bar{x}_1)(\tau - C(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2 - G(\bar{x}_1)). \end{aligned} \quad (24)$$

Aplicando ahora el principio de optimalidad de Richard Bellman, con un índice de desempeño definido como:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \underbrace{(\tilde{x}^\top Q \tilde{x} + u^\top R u)}_{f_0(\tilde{x}, u)} dt, \quad (25)$$

y aplicando programación dinámica, es decir:

$$\min_u \left\{ \frac{dV(\tilde{x})}{dt} \Big|_{(10)} + f_0(\tilde{x}, u) \right\}, \quad (26)$$

de la ecuación (26),  $V(\tilde{x})$  esta dada por (17),  $\frac{dV(\tilde{x})}{dt} \Big|_{(10)}$  por (24) y  $f_0(\tilde{x}, u)$  por (25),  $u \triangleq \tau + \tau_h$ , la matriz  $Q$  de dimensión  $2n \times 2n$ , verificando  $Q = Q^\top$ ,  $Q > 0$

y la matriz  $R$  de dimensión  $n \times n$  es simétrica y estrictamente positiva definida. Entonces, (26) puede ser reescrita como:

$$\min_u \left\{ \begin{array}{l} k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2^\top u + \bar{x}_1^\top \bar{P}_{11} \bar{x}_2 + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{21} \bar{x}_2 \\ + (\bar{x}_1^\top \bar{P}_{12} + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{22}) D^{-1}(\bar{x}_1) (u - C(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2 - b \bar{x}_2 - G(\bar{x}_1)) \\ + \frac{1}{2} \tilde{x}^\top Q \tilde{x} + \frac{1}{2} u^\top R u \end{array} \right\}, \quad (27)$$

usando las condiciones suficientes para un mínimo local, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{array}{l} k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2^\top u + \bar{x}_1^\top \bar{P}_{11} \bar{x}_2 + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{21} \bar{x}_2 \\ + (\bar{x}_1^\top \bar{P}_{12} + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{22}) D^{-1}(\bar{x}_1) (u - C(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2 - b \bar{x}_2 - G(\bar{x}_1)) \\ + \frac{1}{2} \tilde{x}^\top Q \tilde{x} + \frac{1}{2} u^\top R u \end{array} \right\} = 0, \quad (28)$$

es decir

$$k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2^\top + [\bar{x}_1^\top \bar{P}_{12} + \bar{x}_2^\top \bar{P}_{22}] D^{-1}(\bar{x}_1) + u^\top R = 0 \quad (29)$$

y puesto que  $x^\top y = y^\top x$ :

$$k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2^\top + D^{-1}(\bar{x}_1) [\bar{P}_{12}^\top \bar{x}_1 + \bar{P}_{22}^\top \bar{x}_2] + R u = 0 \quad (30)$$

finalmente despejando el control  $u$ , se tiene:

$$u = -R^{-1} \{ k_E \tilde{\varepsilon}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \bar{x}_2^\top + D^{-1}(\bar{x}_1) [\bar{P}_{12}^\top \bar{x}_1 + \bar{P}_{22}^\top \bar{x}_2] \}. \quad (31)$$

#### 4. Control del dispositivo háptico PHANToM 1.0

En esta sección se describe la arquitectura y el hardware de la interfaz háptico PNAHToM 1.0 y se obtienen las matrices de penalización  $Q$  y  $R$  del índice de desempeño definido en (25), a partir de las cuales se halla la matriz  $P$  en la ecuación algebraica de Riccati, que definen las ganancias del controlador no lineal (31). El objetivo de esta propuesta es emplear un controlador sub-óptimo no lineal diseñado para regulación en tareas de guiado háptico, por medio de la interfaz electrónica de potencia del dispositivo háptico PHANToM 1.0 y una computadora de escritorio. La interfaz electrónica de potencia del dispositivo dispone de tres Procesadores Digitales de Señales (DSP, de sus siglas en inglés), que se comunican con la computadora mediante el protocolo IEEE 1284EP en punto paralelo, que suministra una impedancia de  $199 \Omega$  a una frecuencia de 100Hz. Los actuadores de PHANToM 1.0 tienen acoplados codificadores ópticos HEDM-5500-B02, que tienen una resolución mayor a 1024 pulsos por revolución, una resolución para la medición de fuerzas de torsión de 0.03 N/mm en posición nominal, fricción de 0.004 N, fuerza máxima de 8.5 N, rigidez de 3.4 N/mm y una inercia de 75 gr y un rango de operación de  $-40^0$  a  $100^0$ C, compatibles con tecnología TTL. La computadora de escritorio empleada para la evaluación del controlador (31) tiene un procesador intel core 2Duo, que trabaja a una velocidad de 2.66GHz en ambiente PC con XP y service pack 2. La programación de las estrategias de control y de la dinámica del sistema se desarrollan en Visual C++ con las herramientas H3D de Sensable Technologies, la visualización gráfica del desempeño se hace con programación fuera de línea en MATLAB 2012b.

PHANToM 1.0 es un dispositivo h\'aptico de tres grados de libertad, con articulaciones de revoluci\'on y por ello puede ser definido como un mecanismo de eslabones articulados, que tiene prop\'ositos distintos a los de un robot manipulador, no obstante, la t\'ecnica de modelado matem\'atico es la misma. Su modelo din\'amico se emplea para el dise\~no de estrategias de control y esta constituido por las ecuaciones de movimiento que relacionan las fuerzas debidas a efectos iniciales, Coriolis, centr\'ipetas, gravitatorias y de fricci\'on, siendo esta \'unica despreciable por la calidad en la transmisi\'on de movimiento articular.

De acuerdo con [13], el modelo din\'amico reducido de PHANToM se obtiene mediante la formulaci\'on de Euler-Lagrange, al que se le aplica el cambio de variable  $\bar{x} = x - x^+$  y definiendo  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$  y corresponden a las entradas de control para cada uno de los actuadores del sistema. Los puntos de equilibrio alrededor de los cuales se obtiene (13) y (??) se definen por  $x^+ = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$  que indican una posici\'on articular  $\theta_1 = k_1$ ,  $\theta_2 = k_2$  y  $\theta_3 = k_3$ , en radianes y una velocidad 0 rad/seg. Proponiendo una linealizaci\'on del sistema alrededor del punto de equilibrio  $x^+ = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ , con condiciones iniciales  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ , se tiene:

$$A = \begin{cases} a_{1,4} = 1, a_{2,5} = 1, a_{3,6} = 1, \\ a_{5,2} = 9.5839, a_{5,3} = -10.5219, \\ a_{6,2} = 37.8075, a_{6,3} = 386.5271, \\ 0 \text{ para los elementos restantes} \end{cases} \quad B = \begin{cases} b_{4,1} = 2535, b_{5,2} = 2549, b_{6,3} = 10377, \\ 0 \text{ para los elementos restantes} \end{cases}$$

con el par  $(A, B)$  controlable. En consecuencia, se calcula un controlador alrededor del punto de equilibrio  $x^+$ , empleando el enfoque \'optimo del LQR, por medio de la funci\'on de Bellman (17) y  $P$ , que satisface la ecuaci\'on algebraica de Riccati. Para el \'indice de desempe\~no (25), se eligen las siguientes matrices  $Q$  y  $R$

$$Q = \begin{cases} q_{1,1} = 254.1756563965411, \\ q_{2,2} = 254.1756563965167, \\ q_{3,3} = 264.4382885838342, \\ q_{4,4} = 254.9973344114833, \\ q_{5,5} = 254.9973344114585, \\ q_{6,6} = 256.0342099346721, \\ q_{ij} = 0, i \neq j, \end{cases} \quad R = \begin{cases} r_{ij} = 6.153846153846154 & i = j, \\ r_{ij} = 0 & i \neq j. \end{cases}$$

que dan lugar a la siguiente  $P$ , como soluci\'on espec\'ifica a la ecuaci\'on algebraica de Riccati

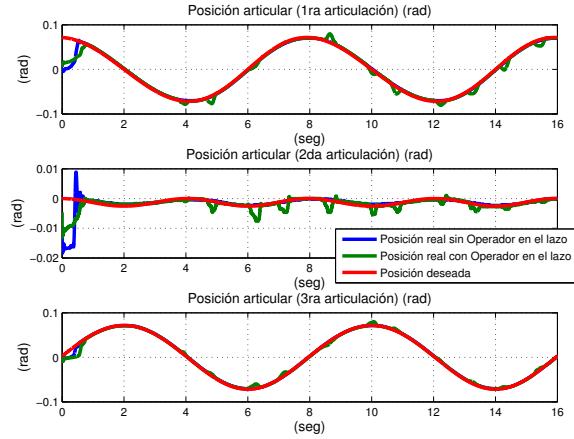
$$P = \begin{cases} p_{1,1} = 254.59977, p_{2,2} = 254.60165, p_{3,3} = 260.20627, \\ p_{4,4} = 0.0136556, p_{5,5} = 0.0155401, p_{6,6} = 0.0038252, \\ p_{1,4} = p_{4,1} = 0.0136328, p_{2,3} = p_{3,2} = -5.9104 \times 10^{-12}, \\ p_{2,5} = p_{5,2} = 0.0155141, p_{2,6} = p_{6,2} = 1.65698 \times 10^{-16}, \\ p_{3,5} = p_{5,3} = -3.5859 \times 10^{-16}, p_{3,6} = p_{6,3} = 0.0038874, \\ p_{5,6} = p_{6,5} = 1.383641 \times 10^{-18}, \\ 0 \text{ para los demás elementos.} \end{cases}$$

## 5. Resultados experimentales

En la presente sección se exhiben y discuten los resultados experimentales obtenidos de la implementación de la ley de control no lineal sub-óptima, los cuales permiten validar el rendimiento y desempeño del dispositivo PHANTOM 1.0 en una tarea de guiado háptico. El experimento realizado para reportar los resultados en esta sección corresponden a un seguimiento de trayectorias, en el cual la trayectoria deseada se define a partir de las ecuaciones paramétricas de una circunferencia sobre el plano  $xz$ , para la posición operacional y sus respectivas primera y segunda derivadas para velocidad y aceleración, como se muestra a continuación:

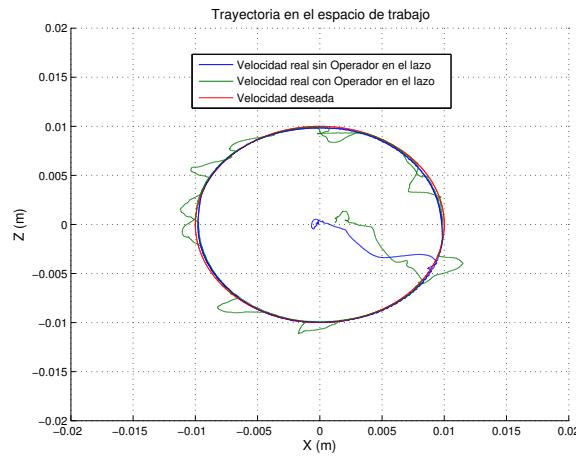
$$\begin{aligned}x(t) &= h + r \cos(\omega t) \\y(t) &= 0 \\z(t) &= k + r \sin(\omega t),\end{aligned}$$

donde  $h = 0$  m.,  $k = 0$  m. determinan las coordenadas del centro de la circunferencia y se encuentran en el origen del plano,  $r = 0.01$  m. representa el radio de la circunferencia (en metros),  $\omega = 2\pi f$ , la frecuencia  $f = \frac{1}{ts}$  y  $ts = 8$  el tiempo necesario para desarrollar la tarea un ciclo completo. La tarea de guiado se realiza durante 16 seg para observar el desempeño del dispositivo háptico al completar la trayectoria deseada en dos ciclos completos, es decir, para efectuar la trayectoria de la circunferencia dos veces, con las mismas consignas de centro y radio. Es importante mencionar que fue necesario el uso del modelo cinemático inverso de posición y del modelo cinemático inverso de velocidad, para la obtención de la posición y velocidad articular respectivamente, que describen las posiciones y velocidades operacionales deseadas, dado que el control que presentado en la sección 3 esta diseñado en el marco articular.



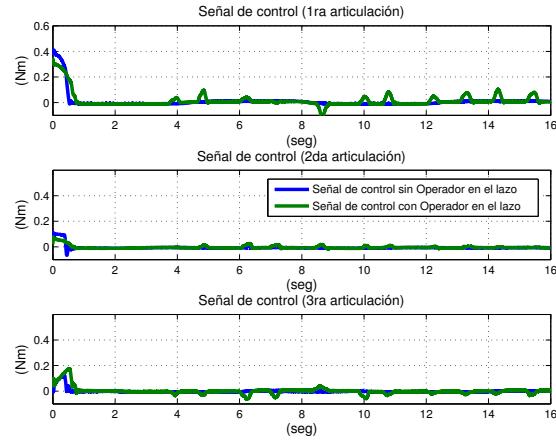
**Figura 1.** Posición articular y referencias deseadas.

La Figura (1) representa la posici\'on articular con y sin operador en el lazo de control, en la cual se observa un seguimiento articular con alto desempe\~no para ambos casos, donde la posici\'on articular real converge a la deseada en un tiempo menor a 0.5 seg. y permanece con este comportamiento a lo largo del tiempo de ejecuci\'on, y en el experimento con operador en el lazo se muestra como el control propuesto lleva al operador a desarrollar la trayectoria deseada aun con las perturbaciones inducidas por el operador.



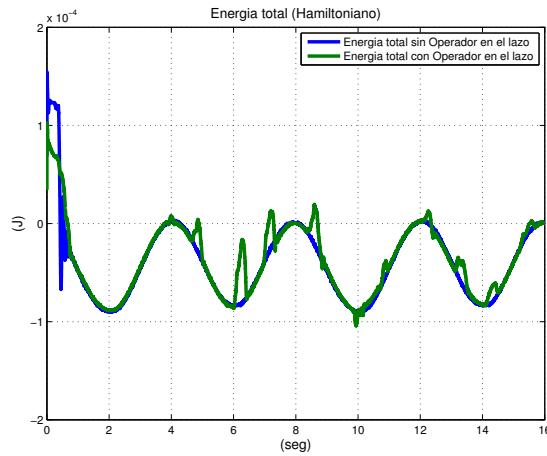
**Figura 2.** Trayectoria en el espacio de trabajo con prop\'osito de entrenamiento Kinest\'etico.

La Figura (2) ilustra la trayectoria del dispositivo h\'aptico PHANTOM 1.0 sobre su espacio de trabajo, bajo laacci\'on del control (31), en ella se aprecia la correcta conversi\'on de variables articulares a variables operacionales por medio de los modelos cinem\'aticos, tambi\'en es apreciable que el error en el marco operacional esta por de bajo del orden de los mil\'imetros, pues la circunferencia deseada tiene radio equivalente a un cent\'imetro, en esta misma Figura, se observan las perturbaciones inducidas por el operador en el guiado h\'aptico y como el control se adapta a ellas para continuar con el seguimiento dadas las din\'amicas no modeladas introducidas por el comportamiento del operador con baja experiencia en guiado, raz\'on que justifica el alto desempe\~no del controlador propuesto para tareas de guiado h\'aptico que requieren de alta precisi\'on.



**Figura 3.** Señal de control aplicada.

La contribución de la estrategia de control propuesta adquiere mayor evidencia en la Figura (3), puesto que el dispositivo logra convergencia en intenta la trayectoria deseada con la energía empleada, en movimiento libre y en presencia del operador con baja experiencia en este tipo de tareas respectivamente, la energía para ambos casos es relativamente baja y con valores máximos en el orden de los 0.5 Nm., como se aprecia en el caso de la primera articulación.



**Figura 4.** Energía total empleada en la tarea, con el operador en el lazo en condiciones de disturbio.

Las tendencias de la magnitud en la señal de control de la Figura (3) en los primeros instantes del experimento para el caso de movimiento libre se encuentran directamente relacionados con las condiciones iniciales del dispositivo y las condiciones deseadas para la tarea definida, lo cual abre la posibilidad de reducir la magnitud del error tanto en posici\'on y velocidad, como magnitud de la señal de control, por medio de una colocaci\'on del efecto final directamente sobre un punto de la trayectoria deseada, antes de comenzar el guiado. Esta propuesta no da a conocer estudios comparativos con otras t\'ecnicas de control, sin embargo es notable que la energ\'ia empleada por dispositivo con otras estrategias de control como es el caso de [7,11], es comparativamente mayor a la empleada en nuestra propuesta

Por ultimo, la Fig. (4) ilustra el comportamiento de la energ\'ia total empleada en la tarea de guiado h\'aptico bajo la acci\'on del controlador no lineal sub-\'optimo en movimiento libre y bajo las perturbaciones inducidas por el operador humano en el lazo de control, en ella puede apreciarse que la cantidad de energ\'ia requerida para la tarea de guiado es relativamente m\'inima, en particular es definida solo por energ\'ia potencial del sistema para el primer caso, y con la adici\'on de la energ\'ia aplicada por el operador dadas las restricciones como el conocimiento incierto de la trayectoria deseada y la baja experiencia en tareas guiado h\'aptico.

## 6. Conclusiones

El controlador sub-\'optimo que se ha presentado en este \'art\'culo, para el seguimiento de trayectorias y el desarrollo de tareas en guiado h\'aptico pasivo, ha tenido resultados experimentales con desempe\~no satisfactorio y excelente manipulabilidad din\'amica con consumo de energ\'ia relativamente bajo. La principal contribuci\'on de esta propuesta y de sus resultados, ilustran la posibilidad de m\'etodos de control no lineal y sub-\'optimos para la soluci\'on de problemas de minimizaci\'on del consumo de energ\'ia en el control de robots manipuladores, para minimizar el esfuerzo del mecanismo de eslabones articulados e interfaces electromec\'anicas de potencia, preservando la vida \'util de sus mecanismos, y la obtenci\'on de un comportamiento apropiado para tareas de guiado h\'aptico mediante la penalizaci\'on de la convergencia del estado y la magnitud de la señal de control en el \'indice de desempe\~no. Se demuestra como una funci\'on cuadr\'atica como (19), es \'util en la s\'intesis de controladores no lineales sub-\'optimos. Se aprovecharon las propiedades del modelo del dispositivo h\'aptico para sintetizar la estrategia de control no lineal propuesta. El algoritmo de control no lineal sub-\'optimo se considera factible para su implementaci\'on en aplicaciones de robots manipuladores e interfaces h\'apticas que requieren de alto desempe\~no y bajo consumo monitoreado de la energ\'ia. Los experimentos presentados demuestran un rendimiento aceptable del dispositivo bajo la ley de control penalizada adecuadamente, propuesta para tareas de guiado h\'aptico.

**Agradecimientos.** El primer autor agradece a **CONACYT** por la beca de maestría otorgada durante el periodo Agosto 2011- Junio 2013, con número de registro **290649**.

## Referencias

1. Athans M., Falb P.L. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*, Mc Graw Hill, New York, 1966.
2. Basin M., Sanchez E., Martínez-Zúñiga R. Optimal filtering for systems whit multiple state and observation delays. *Int. Journal of Innovative Computing, Information and Control*, volt, no.5, pp.1309-1320, 2007.
3. Burdea, G.C. *Force and Touch Feedback for Virtual Reality*, Ed. John Wiley and Sons, Inc., Electrical and Computer Engineering Department, The State University of New Jersey, 1996.
4. Hemami, A. Mehrabi, M. G. and Cheng, R. M. H. Systhesis of an optimal control law for path tracking in mobile robots, *Automatica*, vol. 28(2), pp. 383-387, 1992.
5. Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
6. Kalman, R.E. Contributions to the theory of optimal control. *Bol Soc Mat Mex*, vol. 5, pp 102–109, 1960.
7. Dominguez-Ramirez, O. A. & Parra-Vega, V. Active Haptic Interface with Purposes of Remote Training, *Proceedings of the 11th International Conference on Advanced Robotics*, ISBN 972-96889-9-0, vol. 3, pp. 1588-1593, University of Coimbra, Coimbra, Portugal, 2003.
8. Hrovat D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications, *Automatica*. vol 33. no. 1, pp. 1782-1817, 1997.
9. Lin, F. and Brandt, R.D. An optimal control approach to robust control of robot manipulators, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, vol. 14(1), pp 69-77, 1998.
10. Padhi. R., Prabhat P., Balakrishnan S.N., Reduced order optimal control synthesis of a class of nonlinear distributed parameter systems, using single network adaptive critic design, *Int. Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol.4, no.2, pp.457-470, 2008.
11. Parra-Vega, V., S. Arimoto, Y. H. Liu, G. Hirzinger, and P. Akella, Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments, *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol. 19 (6), pp 967-976, December, 2003.
12. Ordaz-Oliver J.P., Santos-Sánchez O.J. López-Morales V., On the Sub-optimal Feedback Control Law Synthesis of Underactuated Systems *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol.5, no.9., pp2791-2808, 2009.
13. Domínguez-Ramírez, O. A. and Parra-Vega, V. Realistic Active Haptic Guided Exploration with Cartesian Control for Force-Position Tracking in Finite Time. *Journal of Applied Bionics and Biomechanics*, ISSN 1176-2322, ABBI, Vol 3 (4) pp 279-289, Cambridge, England, 2006.
14. Verscheure, D., Demeulenaere, B., Sweveres, J. De Schutter, J. and Diehl, M. Time optimal path tracking for robots: a convex optimization approach, *IEEE Trasaction on Automatic Control*, vol. 54(10), pp. 2318-2327, 2009.